Lissage par courbes de Bézier

Kylian Prigent

27 mai 2026

Géogébra en ligne

Polynômes de Bernstein

Polynômes de Bernstein

$$B_{i,n}(X) = \binom{n}{i} X^i (1-X)^{n-i}$$

Propriétés

1. $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \forall u \in [0,1], B_{i,n}(u) \geq 0.$
2. Partition de l'unité : $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) = 1.$
3. $B_{i,n}$ atteint son maximum en $u = i/n$.
4. Définition récursive : $B_{i,n}(u) = (1-u)B_{i,n-1}(u) + uB_{i-1,n-1}(u).$

Courbes de Bézier

Courbe de Bézier

$$P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n$$

Pour $t \in [0,1]$:

$$C(u) = (x(u), y(u)) = \left(\begin{array}{ll} x(u) & = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) x_i \\ y(u) & = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) y_i \end{array} \right) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) P_i$$

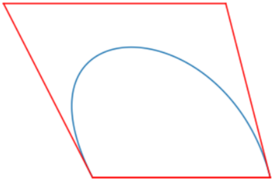
Courbes de Bézier

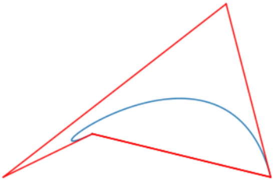
Courbe de Bézier

$$P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n$$

Pour $t \in [0,1]$:

$$C(u) = (x(u), y(u)) = \begin{pmatrix} x(u) & = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) x_i \\ y(u) & = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) y_i \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) P_i$$





Formule récursive pour les courbes de Bézier

On note $C_n(P_0, \ldots, P_n)$ la courbe associée au points de contrôle $P_0, \ldots, P_n$.

Formule récursive

$$C_n(P_0, \ldots, P_n)(u) = (1-u)C_{n-1}(P_0, \ldots, P_{n-1})(u) + uC_{n-1}(P_1, \ldots, P_n)(u)$$

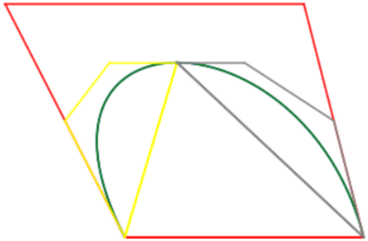
Algorithme de Casteljau

$$
\begin{aligned}
C(u) &= \begin{pmatrix}(1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & u & u^2 & u^3\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-3 & 3 & 0 & 0\\3 & -6 & 3 & 0\\1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Algorithme de Casteljau

$$C(u) = \begin{pmatrix}(1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & u & u^2 & u^3\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-3 & 3 & 0 & 0\\3 & -6 & 3 & 0\\1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix}$$



Courbe algébrique

Si $\mathcal{C}(t) = (P(t), Q(t))$ est une courbe de Bézier où $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, alors on introduit deux nouvelles variables x et y puis $\widetilde{P} = P - x$ et $\widetilde{Q} = Q - y$.

$$\mathrm{Res}_t(\widetilde{P}, \widetilde{Q}) = 0$$

dès qu'il existe un t tel que $\widetilde{P}(t) = \widetilde{Q}(t)$ ce qui est le cas lorsque $(x, y) \in \mathcal{C}$.

Cercle

Si $\mathcal{C}$ est incluse dans un cercle alors

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = r$$

ce qui équivaut à

$$P(t)^2 + Q(t)^2 - 2x_0 P(t) - 2y_0 Q(t) + \widetilde{r} = 0$$